代数幾何学シンポジウム記録
1983年度 pp.177-210

高次元 Fano 多様体と等質空間について

名大理 向井 茂

反標準因子 $-K_X$ が豊富な完備非特異代数多様体を Fano 多様体と言う。ここでは常に複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考えるので、Fano 多様体とは第1 Chern 類 $c_1(X)$ が正であるコンパクト複素多様体であると言っても同じである。2次元以下の Fano 多様体はよく知られている。1次元の場合は射影直線 $\mathbb{P}^1$ と同型，2次元の場合は別名 del Pezzo 曲面とも呼ばれ、10個の変形同値類に分類される。3次元 Fano 多様体は Picard 数 1 のものは [7] で、Picard 数 ≥ 2 のものは [11] [12] で分類された。ここでは、Fano 多様体に対して余指数 (coindex) を定義し、余指数の小さい高次元 Fano 多様体について考察する。

余指数 ≤ 1 のものは射影空間と2次超曲面しかない。余指数 2 の Fano 多様体は del Pezzo 多様体と呼ばれるものと本質的に同じで [4] [5] において分類された。ここでの主な関心は余指数 3 の Fano 多様体の分類で、主な結果は §3 で述べる。Picard 数 1 の余指数 3 Fano 多様体は等質空間を使って構成される。§4 では等質空間の Fano 多様体としての不変量の計算の仕方を説明する。また、§5 では分類に重要な役割を果す藤田の判定法について述べる。最後に、§6 では §3 の主な定理の証明をスケッチする。

§1 Fano多様体の余指数

Fano多様体 X に対していくつかの不変量を定義する。

定義 (1.1) Xの第1 Chern類 $c_1(X)$ を $H^2(X,\mathbb{Z})$の中で割り切る最大の整数 r を Xの指数(index)と呼び、index X でもって表わす。

Fano多様体 X の Picard群 $\mathrm{Pic}\,X$ はねじれを持たず $H^2(X,\mathbb{Z})$ と自然に同型になる。よって $-K_X \sim rH$ となる因子類 H が一意的に定まる。H は2以上の整数では割り切れない。この H のことを Fano多様体Xの基本因子類、また完全線形系 $|H|$ を X の基本線形系と呼ぶ。Hの自己交点数 $(H^{\dim X})$ を Xの次数と呼ぶ。さて、一般的傾向として、指数 r が大きいほど、X は簡単な構造をもつ。実際、次のことが知られている。

(1.2) $\quad \mathrm{index}\,X \leq \dim X + 1$

Xが射影空間の時、上で等号が成立するが、逆に

(1.3) 上で等号が成立するのは Xが射影空間 $\mathbb{P}^n$と同型な時に限る。

(1.2) によって、余指数という量を次の様に定義する。

定義(1.4)　$\Delta = \dim X + 1 - \mathrm{index}\, X$ を Fano 多様体 X の余指数 (coindex) と呼び、coindex X でもって表わす。

index X の定義と (1.2) より、$0 \leq \mathrm{coindex}\, X \leq \dim X$ が成立する。また、余指数には次の性質がある。X が指数 ≧ 2 の Fano 多様体で、Y が基本線形系 |H| の smooth member とする。この時、Y は再び Fano 多様体であるが、

$$(1.5)\quad \begin{cases} \mathrm{coindex}\, Y = \mathrm{coindex}\, X \\ \mathrm{degree}\, Y = \mathrm{degree}\, X \end{cases}$$

が成立する。但し、$X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の時だけは例外である。証明は adjunction formula $K_Y \sim (K_X + Y)|_Y$ と Lefshetz の定理より従う。X が 4次元以上の時は $\rho(Y) = \rho(X)$ も成立する。この (1.5) は次の様にもみることができる。基本線形系 |H| が非常に豊富な時、|H| に付随した射で X を埋め込んだもの $X \subset \mathbb{P}^N$ を X の基本モデルと呼ぶ。基本モデルの次数は X の次数に等しい。この時 X の次元が余指数 Δ よりも大なら、X の超平面切断 $Y = X \cap P$ で非特異なものは Fano 多様体で余指数はやはり Δ に等しい。また、$Y \subset P \simeq \mathbb{P}^{N-1}$ が Y の基本モデルである。このようにして、X から超平面切断によって余指数 Δ の Fano 多様体とその基本モデルを作っていく操作は多様体の次元が Δ に等しくなるまで続けることができる。

例(1.6)　$X=\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n$ とする。$(n\geq 2)$ X は指数 $n+1$ の $2n$ 次元 Fano 多様体。よって余指数は n である。X の基本モデルは Segre embedding　$\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n\subset\mathbb{P}^{n^2+2n}$ でその次数は $\binom{2n}{n}$ に等しい。n 回までの超平面切断で $n\leq\dim Y\leq 2n$ の範囲で余指数 n の Fano 多様体がえられる。例えば　$n=2$ の時は,

$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2\subset\mathbb{P}^8$	指数3の4次元 Fano 多様体	
$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2\cap$(超平面) $\subset\mathbb{P}^7$	〃 2の3	〃
$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2\cap$(超平面)$\cap$(超平面) $\subset\mathbb{P}^6$	〃 1の2	〃

以上,次数6余指数2の Fano 多様体が3種類できる。

余指数を使うと(1.3)は次の様に言い換えられる。

(1.7)　余指数0の Fano 多様体は全て射影空間と同型である。

更に次の事も知られている。

(1.8)　余指数1の Fano 多様体は全て $\mathbb{P}^{n+1}$ の中の非特異2次超曲面 Q^n $(n\geq 2)$ と同型である。また、逆も正しい。

このように、余指数0,1の場合は次元だけでもって多様体の同型類が決ってしまう。しかし,余指数≥ 2の時はもはやこういうことは全く成立しない。この論文の主な目的は余指数3の Fano 多様体であるが、その前に余指数2の Fano 多様体の分類を次の節で復習する。

§2 余指数2のFano多様体

余指数2のFano多様体は藤田[5]の意味における"del Pezzo多様体"と本質的に同じものである。Xが余指数2のFano多様体でHがその基本因子類の時、Riemann-Roch定理とSerreの双対定理と小平の消滅定理より次がえられる。

命題(2.1)([5] I, Theorem(1.9))

$$\dim |H| = d + \dim X - 2$$

但し、dはXの次数($H^{\dim X}$)。

これより、偏極多様体(X, H)のΔ-種数$\Delta(X, H)$は1に等しい。また、(X, H)のsectional genusも1に等しい。よって余指数2のFano多様体の分類はΔ-種数1の偏極多様体の分類に含まれる。

さて、2次元Fano多様体は別名del Pezzo曲面と呼ばれる。del Pezzo曲面には次の10個の変形同値類をもつ。

(2.2) $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, S_d $(1 \leq d \leq 8)$

但し、S_dは射影平面$\mathbb{P}^2$を"一般の位置"にある$(9-d)$個の点でblow upしてえられる曲面(の族)を表わす。S_dのモジュライ数は$2(5-d)$で$d \geq 5$の時S_dはrigidである。S_8は$\mathbb{P}^1$上の$\mathbb{P}^1$-束で、通常$\mathbb{F}_1$で表わされる。なお、"一般の位置"の正確な意味については[8]を参照せよ。

$\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ は各々余指数が 0, 1 で他のものは全て余指数 2 である。8個の変形同値類 S_d $(1\le d\le 8)$ のうち、S_d $(1\le d\le 4)$ はその反標準射が簡明である。

$d=1$　$|-K_{S_1}|$ は1個の base point をもち、有理写像 $S_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ を定める。また、S_1 は重み付射影空間 $\mathbb{P}(1,1,2,3)$ の6次曲面に同型である。

$d=2$　$S_2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$　4次曲線の上で分岐する2重被覆。

$d=3$　$S_3 \subset \mathbb{P}^3$　3次曲面。

$d=4$　$S_4 \subset \mathbb{P}^4$　2つの2次超曲面の完全交叉。

これを参考にすると次数 $(d=)$ $1,2,3,4$ の余指数2 Fano多様体 X を2次元以上の任意の次元 n で構成することができる。即ち、

(2.3)　$d=1$　X は重み付射影空間 $\mathbb{P}(\overbrace{1,\cdots,1}^{n\text{個}},2,3)$ の中の6次超曲面。

$d=2$　$X \longrightarrow \mathbb{P}^n$　4次超曲面の上で分岐する2重被覆。

$d=3$　$X \subset \mathbb{P}^{n+1}$　3次超曲面。

$d=4$　$X \subset \mathbb{P}^{n+2}$　2つの2次超曲面の完全交叉。

$d \geq 5$ の余指数2 Fano多様体には、次のものがみつかる。

(2.4)　$d=5$　5次元ベクトル空間の中の2次元部分空間全体のなすグラスマン多様体 $G(2,5)$。$G(2,5)$ は6次元で指数5。基本モデルは Plücker embedding $G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$。

$d=6$　$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$　Segre embedding

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$　Segre embedding

$d=7$　$B_p(\mathbb{P}^3)$, $\mathbb{P}^3$ を1点 p で blow up したもの。基本線形系は p を通る2次曲面の全体。$B_p(\mathbb{P}^3)$ を $\mathbb{P}^8$ に埋めこむ。

$d=8$　$B_p(\mathbb{P}^2)$, $\mathbb{P}^2$ を1点 p で blow up したもの。

以上あげたもので余指数2の Fano 多様体が本質的につくされる。

定理（[4], [5], [7]（3次元の時のみ)）X は余指数2の Fano 多様体でその次数を d とする。このとき、

(1)　$1 \leq d \leq 8$.

(2)　$1 \leq d \leq 4$ なら、X は (2.3) のいずれかの多様体と同型である。

(3)　$5 \leq d \leq 8$ なら、X は (2.4) のいずれかか、それを何回か超平面切断したものと同型である。

このように、余指数2で次数の低いものは任意次元(≥2)で存在するが、次数の高いものはある次元までしか存在しない。このことは次の様に理解できる。即ち、余指数2のFano多様体、特に極小なもの、は殆んど等質空間を使って（その中で完全交叉を考えたり、その上の2重被覆を作ったり等）つくることができるが、次数の低い時はその等質空間は射影空間であり、高い時はそうでないものになっている。射影空間は任意次元で存在するが、それ以外のものはそういうわけにいかない。よって上のような状況になるというわけである。以下、余指数3のFano多様体の分類に関して述べるが、この場合も結果として上と同様のことが成立していることがわかるであろう。

§3 余指数 3 の Fano 多様体

X は余指数 3 の n 次元 Fano 多様体、H はその基本因子類とする。$-K_X \sim (n-2)H$ となっている。

命題(3.1) 直線束 $\mathcal{O}_X(kH)$ の Euler-Poincaré 標数は次の式で与えられる。

$$\chi(\mathcal{O}_X(kH)) = \frac{2k+n-2}{n!} \times \left\{ \frac{1}{2}(H^n)\prod_{i=0}^{n-2}(k+i) + n(n-1)\prod_{i=1}^{n-3}(k+i) \right\}$$

証明. Riemann-Roch 定理より t に関する n 次多項式 $P(t)$ で、全ての k に対して $P(k) = \chi(\mathcal{O}_X(kH))$ を満すものがある。Riemann-Roch の式の形より

(*) $P(t)$ の最高次の係数は $\frac{(H^n)}{n!}$ に等しい。

$K_X \sim -(n-2)H$ だから Serre の双対定理より,
$\chi(\mathcal{O}_X(kH)) = (-1)^n \chi(\mathcal{O}_X(K_X - kH)) = (-1)^n \chi(\mathcal{O}_X((-n+2-k)H))$.
よって

$$(**) \qquad P(t) = (-1)^n P(-n+2-t)$$

をえる。また, 小平の消滅定理と Serre の双対定理より,

$$(***) \qquad P(0) = 1, \text{ 全ての } -1 \geq k \geq -n+3 \text{ に対して } P(k) = 0$$

をえる。(***) より t に関する 3 次式 $D(t)$ があって $P(t) = D(t)\prod_{i=1}^{n-3}(t+i)/n!$ と書くことができる。
(**) より、$D(t) = -D(-n+2-t)$。よって定数 A, B があって

$$D(t) = (2t+n-2)\{At(t+n-2)+B\}$$

と書ける。最高次の係数を見較べて, $A = \frac{1}{2}(H^n)$ を,

$P(0)=1$ より $B=n(n-1)$ をえる。

証終.

小平の消滅定理 より, $H^i(\mathcal{O}_X(H))=0$ $i>0$ だから, 命題 に $k=1$を 代入して 次を える。

系 (3.2) $\dim|H| = \frac{1}{2}(H^n) + n - 1 \geq n$.

系より, Xの基本線形系 $|H|$ は 充分 たくさんの member をもっているが, ここで我々は次の仮定をおく。

(ES) X には $(n-3)$ 個 の $|H|$ の member $H_1, \cdots, H_{n-3}$ があって $Y = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-3}$ は 完全交叉で しかも 非特異 になる。

上の時, Y は自動的に 指数 1 の 3次元 Fano 多様体 になる。Lefshetz の定理より Y と X は同じ Picard数 をもつ。

系より, X の 次数 (H^n) は 常に 偶数 である ことがわかる。そこで, $g = \frac{1}{2}(H^n) + 1$ とおき, これを X の 種数 と呼ぶ。 g は 常に 2以上の 整数 である。

以下, Picard 数 が 1 と 2以上の 時 に分けて この論文の 主結果 を 述べる。

I. Picard 数 1の 余指数3 Fano 多様体。

先づ 3次元の場合を考える。[7] より, 指数 1, Picard 数 1 の 3次元 Fano 多様体 は 種数が $2 \leq g \leq 10$ と $g=12$ のときにだけ 存在する。

$2 \leq g \leq 5$ の時は反標準モデルは次の様に簡明である。

$g=2$ $X_2 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ 6次曲面で分岐する2重被覆。

$g=3$ $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ 4次超曲面，或いは，
$X_4 \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{P}^4$ 2次超曲面の2重被覆。

$g=4$ $X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5$ 2次と3次の超曲面の完全交叉。

$g=5$ $X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6$ 3つの2次超曲面の完全交叉。

これを参考にすれば，$2 \leq g \leq 5$ の Picard 数1，余指数3の Fano 多様体を任意次元 $n \geq 3$ で構成することは易しい。実際，

(3.3) $g=2$ $X_2 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ 6次超曲面の上で分岐する2重被覆。

$g=3$ $X_4 \subset \mathbb{P}^{n+1}$ 4次超曲面，或いは，
$X_4 \longrightarrow Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ 2次超曲面の2重被覆。

$g=4$ $X_{2,3} \subset \mathbb{P}^{n+2}$ 2次と3次の超曲面の完全交叉。

$g=5$ $X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^{n+3}$ 3つの2次超曲面の完全交叉。

は全て、余指数3，Picard数1のn次元Fano多様体である。また，(ES)をモジュロにすれば、これらが全てであることを示すのも難しくない。

命題(3.4)　Xは余指数3，Picard数1，$2 \leq g \leq 5$のFano多様体で(ES)をみたすとする。この時、Xは(3.3)のどれかに同型である。

さて，$g \geq 6$の時は、もはや$\mathbb{P}^n$の中の完全交叉やその上の2重被覆でFano多様体を構成することはできない。しかし，$\mathbb{P}^n$の代りに別の等質空間を使えば構成ができる。このことについて古典的に知られていたのは$g=6, 8$の場合で、共にGrassmann多様体を使う。固定されたN次元ベクトル空間Vのk次元部分空間の全体を$G(k, N)$で表わす。$G(k, N)$は$k(N-k)$次元でPicard数1のFano多様体である。$G(k, N)$の指数はNに等しく，基本線形系$|H|$は丁度Plücker embedding

$$G(k, N) \subset \mathbb{P}^{\binom{N}{k}-1}$$

を与える。$G(2, 6)$の場合は8次元で指数6，よって余指数は3になる。この場合，Plücker embeddingの次数は14だから，$G(2, 6)$の種数は8に等しい。$g=6$の場合は$G(2, 5)$を使って余指数3のFano多様体がえられる。$G(2, 5)$自身は余指数2だから，$G(2, 5)$の2重被覆で$|2H|$のmemberで分岐するものをつくれば、それが種数6のFano多様体になる。反標準モデルは次の様にしてえられる。

$G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ を Plücker embedding。$\hat{G}(2,5) \subset \mathbb{P}^{10}$ をその錐とする。$\hat{G}(2,5)$ の頂点を通らない2次超曲面 Q と $\hat{G}(2,5)$ の完全交叉 $X = \hat{G}(2,5) \cap Q \subset \mathbb{P}^{10}$ は X が smooth なる余指数3，種数6 の Fano 多様体の反標準モデルである。

さて、残った $g=7, 9, 10, 12$ の場合が問題だが、幸運にも $g=7, 9, 10$ の場合には等質空間で余指数3のものが存在する。

$g=7$　V は10次元ベクトル空間で σ はその上の非退化な2次型式とする。V の部分空間 U は σ のそこへの制限 $\sigma|_U$ が恒等的に零であるとき、(totally) isotropic であると言う。V の isotropic な5次元部分空間の全体を X とする。X は $G(5,10)$ の10次元部分多様体で直交群 $O(10)$ に関する等質空間になっている。

$g=9$　V は6次元ベクトル空間，σ は非退化な歪対称型式として $g=7$ の場合と同じことをする。σ に関して (totally) isotropic な V の3次元部分空間の全体 X は $G(3,6)$ の6次元部分多様体で $Sp(3)$ に関する等質空間になっている。

$g=10$　$\mathfrak{C}$ は Cayley の8元数の全体。$\mathfrak{C}_0$ はその純虚数の全体とする。$V = \mathfrak{C}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の3次元部分空間で Cayley 代数の積に関して totally isotropic なものの全体を考え、その連結成分

X とする。X は $G(3,7)$ の 5次元部分多様体で例外型 Lie 群 G_2（$\mathbb{K}\otimes\mathbb{C}$ の自己同型群）に関する等質空間になっている。

しかし，$g=12$ の場合は余指数 3（Picard 数 1）の等質空間は存在しない。
以上，$g\geq 6$ の場合，余指数 3，Picard 数 1 の Fano 多様体 X は $6\leq g\leq 10$ or $g=12$ かつ $3\leq \dim X\leq n(g)$ の時に存在することがわかった。但し，$n(g)$ は次の通り。

(3.5)

g	6	7	8	9	10	12
$n(g)$	6	10	8	6	5	3

(ES) を仮定すれば $g\geq 7$ の時，この存在範囲は丁度限界でもあることがわかる。

定理 A. X は余指数 3，Picard 数 1，種数 ≥ 7 の Fano 多様体とする。X が (ES) をみたすなら，$g\leq 10$ 或は $g=12$ で，しかも $3\leq \dim X\leq n(g)$ である。但し，$n(g)$ は (3.5) の通り。

II. Picard 数が 2 以上の余指数 3 Fano 多様体

Picard 数が 2 以上の余指数 3 Fano 多様体は (ES) を仮定すれば同型類まできちんと分類することができる。指数 1，Picard 数 ≥ 2 の 3次元 Fano

多様体は84個あったが（[11]）、高次元では数はぐっと少なくなる。

先づ4次元の場合を考える。Yを指数2の3次元Fano多様体或は$\mathbb{P}^3$とすると直積$\mathbb{P}^1\times Y$は指数2の4次元Fano多様体になる。こういう4次元Fano多様体を直積型と呼ぶ。Yの変型同値類は丁度9個ある（$V_d\ (1\leq d\leq 5)$, W_6, $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, V_7, $\mathbb{P}^3$）ので直積型の指数2 Fano多様体Xも丁度9個変型同値類がある。そのうちの6個はPicard数が2，2個が3 そして1個だけ（$X=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$）Picard数が4になる。さて、直積型でないものに対しては次をえる。

定理B　Xは指数2の4次元Fano多様体で直積型ではなく（ES）をみたすとする。このとき、

(1)　XのPicard数は常に2以下である。

(2)　Picard数2のものは変形を無視して丁度9個あり、それらは次の表のもののどれかと同型である。

種数	Xの構造
7	次数$(2,2)$の因子の上で分岐する$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2$の2重被覆。
9	次数$(1,2)$の$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^3$の因子。
11	次数$(1,1)$の$\mathbb{P}^2\times Q^3$の因子。
11	$\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3$の中の次数$(1,1)$の2つの因子の完全交叉。
12	2次超曲面$Q^4\subset\mathbb{P}^5$とその上にのっているconic Cでblow upしたもの。但し、

C はそれの張る平面が Q^4 の中に入っていないとする。

13　5次の特殊直交群を Borel 部分群で割ってできる等質空間 $SO(5)/B$。$Q^3 \subset \mathbb{P}^5$ の上に乗っている直線の全体（$\mathbb{P}^3$ でparametrize される）の universal family（と同型）。

14　2次超曲面 $Q^4 \subset \mathbb{P}^5$ をその上の直線で blow up したもの。

16　2次超曲面 $Q^3 \subset \mathbb{P}^4$ 上の $\mathbb{P}^1$-束。$\mathbb{P}(\mathcal{O}_Q \oplus \mathcal{O}_Q(1))$。

21　$\mathbb{P}^3$ 上の $\mathbb{P}^1$-束 $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2))$。

5次元以上では全て rigid になって，たった4個しか同型類がない。

定理 C　X は余指数3の Fano 多様体で，Picard 数 ≥ 2，次元 ≥ 5 で（ES）をみたしているとする。この時，X は下の4つのどれかと同型である。

(1)　$\mathbb{P}^2 \times Q^3$。

(2)　$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ の因子で次数 $(1,1)$ のもの。

(3)　$\mathbb{P}^5$ を直線で blow up したもの。

(4)　$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$。

(3) は種数 14，それ以外は種数 11 である。

§4 Fano多様体としての等質空間

G は連結線型代数群, P はその放物的部分群とすると等質空間 $X=G/P$ は Fano 多様体になる。多様体 X のコホモロジー環の構造は G の Lie 環とその root 系を使って書き下せ、それでもって X の Chern 類がどうなるかもわかっている（[1]）。この節では G が単純で P が極大（この時 X の Picard 数は 1 になる）の時に, X の次元, 指数, 次数等の計算のし方を説明する。

命題 (4.1)（[1] I, p.512） G は連結な線型代数群, P はその放物的部分群とする。この時、$X=G/P$ は Fano 多様体である。

次の証明は森氏に負う。

証明. $\mathfrak{g}$ は G の Lie 環, T_X は X の接束とする。自然な写像 $\mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}_X \longrightarrow T_X$ は各点で全射である。よって, 反標準束 $\overset{\dim X}{\wedge} T_X$ は零でない大域切断をもつ。言い換えれば 反標準線形系 $|-K_X|$ は空でない。$|-K_X|$ は G-不変で G は X に推移的に作用しているから $|-K_X|$ は free。よって, 次を示せばよい。

主張 反標準射 $\Phi_{|-K_X|} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$ は有限。

X の次元に関する帰納法で証明する。$\Phi_{|-K_X|}$ は G-同変であるから P を含む G の部分代数群 G' があって $\Phi_{|-K_X|}$ の像は G/G' とまた各 fibre は G'/P と同型になる。X は単有理的であるから $-K_X$ は自明でない。よって $\dim G'/P < \dim X$。$X'=G'/P$ の各連結成分は等質空間だから、帰納法の仮定より

$-K_{X'}$ は豊富である。一方，X' は $\Phi_{|-K_X|}$ の fibre だから $-K_{X'} \sim 0$。よって $\dim X' = 0$ でなければならない。

証終

さて、以下では G は単純かつ単連結，P はその極大放物的部分群とする。互いに共役な P と P' は同型な等質空間を定めるから，P の共役類のみを問題にすればよい。次の事はよく知られている。

(4.2) G の極大放物的部分群の共役類の個数は G の階数 l に等しく，各共役類は G の Dynkin 図形の頂点（単純 root）と1対1に対応している。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{極大放物的}\\ \text{部分群}\end{array}\right\}\Big/\text{共役} \xleftrightarrow{1:1} \text{Dynkin図形 } \Delta \text{ の頂点}$$

$$\begin{array}{ccc} \Psi & & \Psi \\ P & \longleftrightarrow & \alpha \end{array}$$

$\mathfrak{g}$ は G の Lie 環，R は G の root の全体，また，$R^{\pm}$ は Δ の $\pm$ root の全体とする。G の Borel 群 B は対応する Lie 部分環 $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in R^-} \mathfrak{g}^{\alpha}$ となるようにとる。正 root でもって α 以外の単純 root の非負係数の線型結合で書けるものの全体を Φ_α とする。この時 (4.2) に対応している P の Lie 部分環 $\mathfrak{p}$ は次の様になっている。

(4.3) $$\mathfrak{p} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\beta\in\Phi_\alpha} \mathfrak{g}^{\beta}$$

正 root でもって Φ_α に入っているものを（α に関する）補正 root と呼ぶ。補正 root の全体を Φ_α で表わす時、(4.3) より同型

$$(4.4) \qquad \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \cong \bigoplus_{\gamma \in \Phi_\alpha} \mathfrak{g}^\gamma$$

をえる。特に、等質空間 $X = G/P$ の次元は補正 root の個数に等しい。即ち、

$$(4.5) \qquad \dim G/P = |\Phi_\alpha|$$

さて、$X = G/P$ の指数の求め方を示そう。第1 Chern 類 $c_1(X)$ が $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の primitive な類の何倍になっているかをみればよい。$H^2(G/B, \mathbb{Z})$ は自然に Δ の weight space と同型である。weight は B の1次表現を決め、よって X 上の直線束を定める。その直線束の Chern 類で $H^2(G/B, \mathbb{Z})$ の元が定まるわけである。P は B を含むから自然な全射 $G/B \longrightarrow G/P$ があり、この全射でもって $H^2(G/P, \mathbb{Z})$ は $H^2(G/B, \mathbb{Z})$ の部分加群と同一視される。特に、$H^2(G/P, \mathbb{Z})$ の正の生成元は Δ の α に関する基本 weight ϖ に対応している。

一方、補正 root 全部の和 $x = \sum_{\gamma \in \Phi_\alpha} \gamma$ は weight になって、この x が X の第1 Chern 類 $c_1(X)$ に対応している。まとめると、

$$(4.6) \qquad \begin{array}{ccc} H^2(X, \mathbb{Z}) & \hookrightarrow & H^2(G/B, \mathbb{Z}) \cong \text{weight space} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \text{正の生成元} & \longleftrightarrow & \text{基本 weight} \\ c_1(X) & \longleftrightarrow & \sum_{\gamma \in \Phi_\alpha} \gamma \end{array}$$

となる。

よって X の指数を r とすると

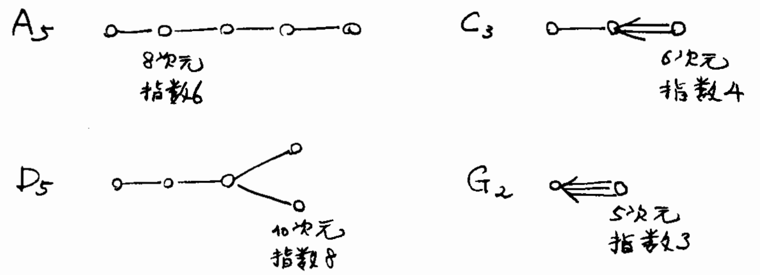
$$(4.7)\qquad \sum_{\gamma\in\Phi_\alpha}\gamma = r\cdot\varpi$$

をえる。ϖ は基本 weight だから $\varpi(\alpha)=\frac{(\alpha^2)}{2}$。よって、

$$(4.8)\qquad r = \mathrm{index}\ G/P = \sum_{\gamma\in\Phi_\alpha}\frac{2(\alpha,\gamma)}{(\alpha^2)}$$

をえる。これを使って計算すると、次の4つの等質空間に対して余指数が3になることがわかる。Dynkin 図形の頂点の下に対応する等質空間の次元と指数を書く。

(4.9)



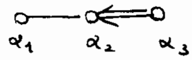
次に、$X=G/P$ の次数の計算の仕方をみよう。Pic X の正の生成元は α の基本 weight に対応しているが、H の自己交点数は次の式で求まる。([1] II, p.340)

$$(4.10)\qquad (H^n) = n!\prod_{\gamma\in\Phi_\alpha}\frac{(\varpi,\gamma)}{(\rho,\gamma)}$$

但し、ρ は全ての正 root の和の半分である。この公式を Dynkin 図形 A_ℓ に適用すると、Plücker embedding の次数を計算する Severi の公式がえられる。また、(4.9) の各々の余指数3の等質空間に対して (4.10) を適用する

と、A_5, C_3, D_5, G_2 に対して次数は各々、14, 16, 12, 18。よって，種数 g は各々、8, 9, 7, 10 となる。1つだけ計算例を示す。

例 (4.11) (4.9) の C_3 の場合に計算してみよう。Bourbaki [2] に従って，単純 root として $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3$, $\alpha_3 = 2e_3$ ととる。C_3 の正 root は $e_1 \pm e_2$, $e_2 \pm e_3$, $e_1 \pm e_3$, $2e_1$, $2e_2$, $2e_3$ の9個。また α_3 に関する補正 root は $e_1 + e_2$, $e_2 + e_3$, $e_1 + e_3$, $2e_1$, $2e_2$, $2e_3$ の6個である。よって補正 root の和は $4(e_1 + e_2 + e_3)$。$e_1 + e_2 + e_3$ が α_3 に関する基本 weight だから，$X = G/P$ の指数は4に等しい。また，$\rho = 3e_1 + 2e_2 + e_3$ だから，Hの自己交点数は



$$
\begin{aligned}
(H^6) &= 6! \prod_{\gamma \in \Phi_{\alpha_3}} \frac{(e_1 + e_2 + e_3, \gamma)}{(3e_1 + 2e_2 + e_3, \gamma)} \\
&= 6! \times \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \\
&= 16
\end{aligned}
$$

をえる。

§5 藤田の判定法とその応用

指数2の4次元Fano多様体 X が smooth な fundamental member Y をもったとする。Y は3次元Fano多様体で、Xの中に豊富な因子として埋めこまれ、法束 $N_{Y/X}$ は Yの反標準束 $\mathcal{O}_Y(-K_Y)$ と同型である。このことは Y に非常に強い制限をつける。実際、次のことが言える。

定理(5.1) 3次元Fano多様体 Y がある指数2の4次元Fano多様体の基本 member になるためには Yの第3 Betti数 $B_3(Y)$ が零でないことが必要である。

これは、非常に有用である。実際、$\rho \geq 2$ の3次元Fano多様体は変形を無視しても87個あるが、そのうち、B_3 の消えないものはたった33個しかない。

証明に先だって、藤田[6]を復習する。

定義(5.2) Y は非特異多様体、L は Yの上の豊富な直線束とする。任意の自然数 n に対して、$H^1(Y, T_Y \otimes L^{-n})$ が消えるとき、Y は L に関して、条件(NS)を満すと言う。

さて、藤田の判定法とは次のものである。

定理(5.3)([6]) Y は L に関して(NS)を満すとする。このとき、もし Y が別の非特異多様体 X の中に豊富な因子として埋め込まれて $N_{Y/X} \cong L$ となるならば、X は射影空間 $\mathbb{P}^m$ と同型で、Y はその超平面

でなければならない。

逆に言えば、$Y \neq \mathbb{P}^m$ なら決して Y は $N_{Y/X} \cong L$ となるように豊富な因子として埋めこまれることはできない。後で、一般化するのに必要なので証明を与えておく。

証明　Y は X の中に $N_{Y/X} \cong L$ となるように豊富な因子として埋め込まれているとする。森-隅広[13] より次を言えば充分である。

主張　　$H^0(X, T_X(-Y)) \neq 0$

自然な完全列

$$(5.3.1) \qquad 0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow T_X|_Y \longrightarrow \underset{\displaystyle L}{\overset{}{N_{Y/X}}} \longrightarrow 0$$

（$N_{Y/X} \cong L$）

に L^{-n} を tensor して

$$(5.3.2) \qquad 0 \longrightarrow T_Y \otimes L^{-n} \longrightarrow T_X(-nY)|_Y \longrightarrow L^{1-n} \longrightarrow 0$$

を得る。小平の消滅定理と条件(NS)より，$n \geq 2$ の時 $H^1(Y, T_X(-nY)|_Y)$ が消え，$H^0(T_X(-Y)|_Y)$ が零でないことがわかる。（Y は (NS)を満すから $\dim Y \geq 2$ に注意)。完全列

$$(5.3.3) \qquad 0 \longrightarrow T_X(-(n+1)Y) \longrightarrow T_X(-nY) \longrightarrow T_X(-nY)|_Y \to 0$$

と $H^1(X, T_X(-NY)) = 0$，$N \gg 0$，より $n \geq 2$ なら $H^1(X, T_X(-nY))$ が消えることがわかる。よって (5.3.3) の $n=1$ の時より，制限写像

$$H^0(X, T_X(-Y)) \longrightarrow H^0(Y, T_X(-Y)|_Y)$$

は全射。だから、$H^0(X, T_X(-Y)) \neq 0$ を得る。

証終

定理(5.1)はこれと次の命題より従う。

命題(5.4) $B_3=0$ の3次元 Fano 多様体 Y は $-K_Y$ に関して条件(NS)を満す。

先に次を示す。

補題(5.5) Y を3次元 Fano 多様体とする時，反標準線形系 $|-K_Y|$ には互いに同型でない smooth members が存在する。

証明 $|-K_Y|$ が非常に豊富な時のみを考察する。$Y \subset \mathbb{P}^N$ を Y の反標準モデル，$P=\{Y_t; t \in \mathbb{P}^1\}$ はその generic pencil とする。Y_t の generic member は smooth な K3 曲面で，$\mathcal{O}_{Y_t}(-K_Y)$ を偏極としてもつ。全ての t に対して，Y_t は通常2重点しかもたない([9])から、周期写像

$$
\begin{aligned}
\varphi : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathcal{J} = \text{周期領域} \\
t &\longmapsto (Y_t, \mathcal{O}_{Y_t}(-K_Y)) \text{ の周期}
\end{aligned}
$$

が定まる。

主張 φ は定値写像ではない。

定値写像だとすると，全ての t に対して $(Y_t, \mathcal{O}_{Y_t}(-K_Y))$ はある偏極 K3 曲面 (S, L) と同型である。今考えている

pencil P の base locus で Y を blow up したものを $\tilde{Y}$ とすると，自然な射 $f: \tilde{Y} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ があって f の $t \in \mathbb{P}^1$ における fibre は Y_t；よって S，に同型になる．S の自己同型群は離散的で，$\mathbb{P}^1$ は単連結だから $\tilde{Y}$ は $S \times \mathbb{P}^1$ と同型．よって Fano 多様体 Y が $S \times \mathbb{P}^1$ と双有理同値となるが，これは明らかに矛盾である．よって主張を得る。

1つの K3 曲面 S を与えた時，その上の偏極は高々可算個しかない．よって，主張より互いに同型でない P の smooth members が存在する．

証終

命題(5.4)の証明．全ての自然数 n に対して $H^1(Y, T_Y(nK_Y)) = 0$ を言えばよい．[I/A] より $|-K_Y|$ には smooth member S が存在する．自然な完全列

$$(5.4.1) \qquad 0 \longrightarrow T_S \longrightarrow T_Y|_S \longrightarrow \underset{\mathcal{O}_S(-K_Y)}{\underset{\wr\wr}{N_{S/Y}}} \longrightarrow 0$$

に $\mathcal{O}_S(nK_Y)$ を tensor して

$$(5.4.2) \qquad 0 \longrightarrow T_S(nK_Y) \rightarrow T_Y(nK_Y)|_S \longrightarrow \mathcal{O}_S((n-1)K_Y) \rightarrow 0$$

を得る．

主張 1. $\quad H^0(Y, T_Y(nK_Y)|_S) = 0 \qquad n \geq 2.$

S は K3 曲面だから，$H^0(S, T_S) = 0$．よって $n \geq 1$ なら常に $H^0(S, T_S(nK_Y)) = 0$ である．また，$n \geq 2$ なら $H^0(S, \mathcal{O}_S((n-1)K_Y)) = 0$．よって完全列 (5.4.2) より，

主張.1.をえる。

主張.2. smooth member $S \in |-K_Y|$ を適当にとれば $H^0(S, T_Y(K_Y)|_S) = 0$。

S を適当にとれば，(5.4.2) の $n=1$ の時の coboundary map

$$\delta : H^0(\mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(T_S(K_Y))$$

が零でないことを言えばよい。完全列 (5.4.1) の coboundary map

$$\alpha : H^0(S, N_{S/Y}) \longrightarrow H^1(S, T_S)$$

は $\alpha(A) = A \cup \delta(1)$ となっているから α が零でないことを言えば充分である。ところが、この α は次のような幾何学的意味をもっている。S の $|-K_Y|$ での近傍 U を取れば，U の各点に対して S の小変形が定まるから正則写像 A

$$|-K_Y| \supset U \xrightarrow{\quad A \quad} M = S\text{の倉西空間}$$

をえる。$|-K_Y|$ の S に対応する点での接空間は自然に $H^0(S, N_{S/Y})$ と，M の S に対応する点では $H^1(S, T_S)$ と各々同型である。しかも，A の誘導する接空間の準同型は，この同型でもって，α に等しい。よって補題 (5.5) より S を適当にとれば α は零でない。これで、主張 2 が証明できた。

完全列

$$0 \longrightarrow T_Y((n+1)K_Y) \longrightarrow T_Y(nK_Y) \longrightarrow T_Y(nK_Y)|_S \rightarrow 0$$

と上の 2つの主張より，$n \geq 1$ なら

$$H^1(Y, T_Y((n+1)K_Y)) \longrightarrow H^1(Y, T_Y(nK_Y))$$

は単射であることがわかる。よって，Y が (NS) を満すには $H^1(Y, T_Y(K_Y)) = 0$ でさえあればよい。一方，$T(K_Y)$ は自然に Ω^2_Y と同型だから Hodge 分解と仮定 $B_3 = 0$ より $H^1(Y, T_Y(K_Y)) \cong H^1(Y, \Omega^2_Y) = 0$ をえる。

証終

藤田の判定法は次の様に改良することができる。

定義.(5.6) Y は非特異多様体，L はその上の豊富な直線束とする。任意の $n \geq 2$ に対して $H^1(Y, T_Y \otimes L^{-n})$ が消える時，Y は L に関して条件 (NW) を満すと言う。

定理 (5.7) Y は L に関して (NW) を満すとする。Y が非特異多様体 X に埋め込まれ，X の k 個の豊富な因子 $D_1, \cdots, D_k$ の完全交叉になりしかも $\mathcal{O}_Y(D_i)$，$1 \leq i \leq k$，は全て L と同型であるとする。この時，次のどちらかが成立する。

(1) $k \leq \dim H^1(Y, T_Y \otimes L^{-1})$，或は

(2) X は $\mathbb{P}^m$ と同型で Y はその線型部分空間。

証明. Y は k 個の因子 $D_1, \cdots, D_k$ の完全交叉 $D_1 \cap \cdots \cap D_k$ であるとする。完全列

$$(*) \quad 0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow T_X|_Y \longrightarrow \underset{\substack{\wr\wr \\ L^{\oplus k}}}{N_{Y/X}} \longrightarrow 0$$

より，$N = \sum_{i=1}^{k} n_i \geq 2$ ならば $H^1(Y, T_X(-\sum_{i=1}^{k} n_i D_i)|_Y) = 0$ がわかる。また，Koszul 完全列

$$0 \to \mathcal{O}_X(-\sum_{i=1}^{k} D_i) \to \cdots\cdots \to \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{O}_X(-D_i) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y \to 0$$

と　$H^1(X, T_X(-\sum n_i D_i)) = 0$，$N >> 0$，を使えば　$N = \sum n_i$ に関する逆帰納法により，$N \geq 2$ ならば $H^1(X, T_X(-\sum n_i D_i))$ が消えることがわかる。よって，制限写像

$$H^0(X, T_X(-D_i)) \longrightarrow H^0(Y, T_X|_Y \otimes L^{-1})$$

は全射である。もし，$H^0(Y, T_X|_Y \otimes L^{-1}) \neq 0$ ならば　X は射影空間で各 D_i はその超平面。よって (2) を得る。$H^0(Y, T_X|_Y \otimes L^{-1}) = 0$ の時は完全列 $(*)\otimes L^{-1}$ の coboundary map

$$H^0(Y, N_{Y/X} \otimes L^{-1}) \longrightarrow H^1(Y, T_Y \otimes L^{-1})$$

は単射。よって，(1) を得る。

証終

この定理より，(ES) を満す余指数 3 の Fano 多様体の次元の評価を与えることができる。

系 (5.8)　X は余指数 3 の Fano 多様体で (ES) を満すとする。即ち，$(\dim X - 3)$ 個の基本 member $H_1, \cdots, H_{\dim X-3}$ があって，完全交叉 $Y = H_1 \cap \cdots \cap H_{\dim X-3}$ は非特異であるとする。この時，もし $H^1(Y, T_Y(2K_Y)) = 0$ ならば

$$\dim X \leq 3 + \frac{1}{2} B_3(Y)\text{。}$$

証明．命題 5.4 の証明の主張 1 でみたように $n \geq 3$ なら $H^1(Y, T_Y(nK_Y))$ は $H^1(Y, T_Y(2K_Y))$ の部分空間と同型。よって，仮定より，3次元 Fano 多様体 Y は $-K_Y$ に関して条件 (NW) をみたす。一方，

$T_Y(K_Y) \cong \Omega_Y^2$, $H^3(Y, \Theta_Y) = 0$ と Hodge 分解より $H^1(Y, T_Y(K_Y))$ の次元は $\frac{1}{2} B_3(Y)$ に等しい。よって定理(5.7)より系をえる。

証終

§6 主結果の証明

§3で述べた定理A, B, Cの証明の方針について述べる。定理Aは系(5.8)を使ってもできるが、細かい点で問題がでてくるので、Fano多様体の代りにK3曲面を使って証明する。Xは余指数3 Fano多様体で(ES)を満しているとする。[M]より、Xの基本線型系$|H|$の$(n-2)$個のmember $H_1, \cdots, H_{n-2}$で$S = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-2}$が完全交叉でsmoothになるものがある。

定理Aの証明。Xは余指数3のn次元Fano多様体でPicard数は1とする。$(S, H|_S)$は偏極K3曲面でその次数はXの次数$d = 2g-2$に等しい。

補題　Xをgenericに変形し、H_i $(1 \leq i \leq n-2)$をgenericにとると、$(S, H|_S)$はgenericな次数dの偏極K3曲面である。

この補題を§3であげた余指数3等質空間$X = Spin(10)/P$, $Grass(2,6)$, $Sp(3)/P$, G_2/Pに適用するとgenericな次数$d = 12, 14, 16, 18$の偏極K3曲面はこれらの等質空間の中の完全交叉として実現される。これより、Bottの消滅定理([3])を使って計算すると、

(6.1)　(S, L)を次数$d = 12, 14, 16, 18$のgenericなK3曲面とする。この時、$\dim H^1(S, T_S \otimes L^{-1})$は各々8, 6, 4, 3に等しい。また、全ての$m \geq 2$に対して$H^1(S, T_S \otimes L^{-m})$は消える。

特に，S は L に関して条件 (NW) を満す。

さて，再び X は一般の余指数 3 Fano 多様体とする。補題 3 より，X の変形 X' とその上の基本 member $H_1', \cdots, H_{n-2}'$ があって $S' = H_1' \cap \cdots \cap H_{n-2}'$ は generic な次数 d の偏極 K3 曲面になる。定理 5.7 と上の (6.1) より $\dim X' = \dim X$ の評価が得られて，$g = 7, 8, 9, 10$ の場合の定理 A を得る。$g = 12$ の時は，その場合の 3 次元 Fano 多様体が $B_3 = 0$ となるので定理 5.1 より定理 A が従う。

証終

さて，定理 B であるが，X を指数 2，Picard 数 ≥ 2 の 4 次元 Fano 多様体とする。(ES) を仮定するから，基本線型系 $|H|$ は smooth member Y をもつ。Y は指数 1 の 3 次元 Fano 多様体でその Picard 数，種数は各々 X のそれに等しい。また，Y の変形同値類は X のそれのみによって決まる。そこで，X を分類することは次の 2 つの部分に分れる。

① 3 次元 Fano 多様体の変形同値類 $\mathcal{Y}$ を与えた時，$\mathcal{Y}$ の member を基本 member にもつ指数 2 の 4 次元 Fano 多様体が存在するか？

② ①の答が Yes なら，その X の構造を決定せよ。

①に対しては定理 5.1 が非常に有効である。[11] より，指数 1，Picard 数 ≥ 2 の 3 次元 Fano 多様体の変形同値類は 84 個あるが，そのうちの 51 個に

対しては第3 Betti数 B_3 は消えている。よって、定理5.1よりそれらに対しては①の答はNoである。残り33個の同値類のうち15個に対してはXのChow環等の構造をみていくと矛盾がでてきて、やはり①の答はNoになる。最後に残った18個に対しては①の答はYesである。そこで、これらに対して②を考えないといけない。Yには複数のextremal rayがあり、各extremal rayはYにfibre空間構造やその上の例外因子等を定める。([10])。XはYを豊富な因子として含むためにこれらがXに遺伝することが示せ、Xの構造を具体的に決めることができる。定理Cに関しても同様である。

References

[1] Borel, A and Hirzebruch, F.: Characteristic classes and homogeneous spaces I & II, Amer. J. of Math. 80 (1958), 458 – 538 & 81 (1959), 315 – 382.

[2] Bourbaki, N.: " Éléments de mathematique " Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.

[3] Bott, R.: Homogeneous vector bundles, Ann. of Math. 66 (1957), 203 – 248.

[4] Fujita, T.: On the structure of certain types of polarized varieties I & II, Proc. Japan Acad. 49 (1973), 800 – 802 & 50 (1974), 411 – 412.

[5] ———.: On the structure of polarized manifolds with total deficiency one I & II, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 709 – 725 & 33 (1981), 415 – 434.

[6] ———.: Impossibility criterion of being an ample divisor, J. Math. Soc. Japan 34 (1982), 355 – 363.

[7] Iskovskih, V. A.: Fano 3-folds I & II, Math. USSR. Izv. 11 (1977), 485 – 527 & 12 (1978), 469 – 506.

[8] ——.: Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields, Math. USSR Izv. 14 (1980), 17–39.

[9] Katz, N.: Pinceaux de Lefshetz : Theoreme d'existence, Groupes de monodromie en Geométrie Algebrique (SGA 7, II), Springer Lecture Notes n°340.

[10] Mori, S.: Threefolds whose anticanonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math.

[11] Mori, S and Mukai, S.: Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$, Manuscripta Math. 36 (1981), 147–162.

[12] —— and ——.: On Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$, Advanced Studies in Pure Mathematics 1 (1983), 101–129.

[13] Mori, S and Sumihiro, H.: On Hartshorne's conjecture, J. Math. Kyoto Univ. 18-3 (1978), 522–533.

[14] Šokurov, V.V.: The existence of lines on Fano threefolds, Math. USSR Izv. 15 (1980), 173–209.

Shigeru MUKAI
Nagoya University